Тұрақты коэффициентті жоғары ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер. Тұрақты коэффициентті жоғары ретті біртекті сызықты дифференциалдық теңдеулер. Жоғарғы ретті біртекті емес дифференциалдық теңдеулер.Әдістемелік нұсқаулар.

Әзірлеген жоғары математика кафедрасының аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т

11- тақырып. Тұрақты коэффициентті жоғарғы ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер. Тұрақты коэффициентті жоғарғы ретті біртекті сызықты дифференциалдық теңдеулер. Жоғарғы ретті біртекті емес дифференциалдық теңдеулер.Әдістемелік нұсқаулар.

Тұрақты коэффициентті жоғарғы ретті біртекті сызықты дифференциалдық теңдеулер

1 - мысал. Берілген теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:

$$y^{IV} - 2y'' = 0\ .$$

а) Мінездемелік теңдеуін құрып, оны шешеміз:

$$k^4 - 2k^2 = 0 \Rightarrow k^2\left(k^2 - 2\right) = 0 \Rightarrow k_{1,2} = 0,\ k_{3,4} = \pm\sqrt{2}\ .$$

б) y_1, y_2, y_3, y_4 фундаменталды шешімдер жүйесін табамыз.

$k = 0$ - екі еселі түбір, онда: $y_1 = e^{0x} = 1,\ y_2 = x \cdot e^{0x} = x$.

$$k = -\sqrt{2} \Rightarrow y_3 = e^{-\sqrt{2}x},\ k = \sqrt{2} \Rightarrow y_4 = e^{\sqrt{2}x}.$$

в) Жалпы шешімі:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-\sqrt{2}x} + C_4 e^{\sqrt{2}x}$$

2 - мысал.

$$y^{V} + 2y''' + y' = 0$$

а) $k^5 + 2k^3 + k = 0 \Rightarrow k\left(k^2 + 1\right)^2 = 0 \Rightarrow k_1 = 0,\ k = \pm i$ - екі еселі түбір.

б) $k = 0 \Rightarrow y_1 = 1,\ k = \pm i \Rightarrow y_2 = \cos x,\ y_3 = \sin x,\ y_4 = x\cos x,\ y_5 = x\sin x$.

в) $y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x + C_4 x\cos x + C_5 x\sin x$.

Жоғарғы ретті біртекті емес дифференциалдық теңдеулер

3 - мысал.

Берілген теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:

$$y'' + 4y' + 3y = xe^{-x}$$

Шешуі:

$$y'' + 4y' + 3y = 0$$

біртекті теңдеуінің жалпы шешімін табамыз.

$$k^2 + 4k + 3 = 0 \Rightarrow k_1 = -1\ , k_2 = -3 \Rightarrow \tilde{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}\ .$$

Теңдеудің дербес шешімін табалық:

$$f(x) = xe^{-x} \Rightarrow P_n(x) = x,\ \alpha = -1$$

- бір еселі түбір $(\alpha = k_1) \Rightarrow r = 1, \overline{P}_n(x) = ax + b\ , y^* = x(ax+b)e^{-x}$, мұндағы a және b сандарын y^* теңдеудің шешімі болатындай етіп алуымыз керек.

$$(y^*)' = \left[-ax^2 + (2a-b)x + b\right]e^{-x} \Rightarrow (y^*)'' = \left[ax^2 - (4a-b)\,x + 2a - 2b\right]e^{-x}\ .$$

Табылған y^*, $(y^*)'$, $(y^*)''$-терді теңдеуіне қоямыз және x-тің бірдей дәрежесінің коэффиценттерін теңестіре отырып, белгісіз коэффиценттерді табамыз:

$$\left\{\left[-ax^2 - (4a-b) + 2a - 2b\right] + 4\left[-ax^2 + (2a-b)\,x + b\right] + 3\left[ax^2 + bx\right]\right\}e^{-x} = xe^{-x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4ax + (2a + 2b) \equiv x \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{4},\ \ b = -\frac{1}{4}.$$

Теңдеудің дербес шешімі

$$y^* = \frac{1}{4}x(x-1)e^{-x},$$

ал жалпы шешімі:

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + \frac{1}{4}x(x-1)\,e^{-x}.$$

4 – мысал.

$$y'' + 2y' + 5y = 2\cos x.$$

Шешуі: $k^2 + 2k + 5 = 0 \Rightarrow D = 4 - 20 = -16 = 4i^2 \Rightarrow k_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i \Rightarrow$

$$\tilde{y} = (C_1\, cos\, 2x + C_2\, sin\, 2x)\; e^{-x}$$

біртекті теңдеудің жалпы шешімі.

$$f(x) = 2\cos x = 2\cos x \cdot e^{ox} \Rightarrow P_n(x) = 2, Q_m(x) \equiv 0, \alpha = 0, \beta = 2 \Rightarrow \alpha \pm \beta i = \pm 2i$$

сипаттамалық теңдеудің түбірі болмайды, яғни,

$$(\pm 2i \neq k_{1,2}) \Rightarrow r = 0\ , U_k(x) = A\, , V_k(x) = B\ ,\ y^* = r^0(A\,cos\,x + B\,sin\,x)\cdot e^{0x} = A\,cos\,x +$$
$$+ B\,sin\,x \Rightarrow (\,y^*)' = B\,cos\,x - A\,sin\,x \Rightarrow (\,y^*)'' = -A\,cos\,x - B\,sin\,x\,.$$

Табылған y^*, $(\,y^*)'$, $(\,y^*)''$ -терді теңдеуге қойсақ:

$$(2B + 4A)\cos x + (4B - 2A)\sin x \equiv 2\cos x \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2B + 4A = 2 \\ 4B - 2A = 0 \end{cases} \Rightarrow\ A = \frac{2}{5},\quad B = \frac{1}{5} \Rightarrow y^* = \frac{2}{5}\,cos\,x + \frac{1}{5}\,sin\,x\,.$$

Онда жалпы шешім:

$$y = (C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)e^{-x} + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x\,.$$

5 – мысал.

Теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:

$$y'^{v} - 3y'' = 9x^2$$

Шешуі. Сипаттамалық теңдеуді құра отырып, оны шешіп, фундаменталдық шешімдер жүйесін табамыз және сәйкес біртекті дифференциал теңдеудің жалпы шешімін $\tilde{y}$ табамыз:

$$\lambda^4 - 3\lambda^2 = 0\,, \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_{3,4} = \pm\sqrt{3}.$$
$$\tilde{y} = C_1 + C_2\,x + C_3e^{x\sqrt{3}} + C_4e^{-x\sqrt{3}}.$$

Мұнда α=0. Мінездемелік теңдеудің $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ екі еселі түбірі α=0-мен беттеседі, ендеше, r = 2 . Теңдеудің дербес шешімі $y^* = x^2(Ax^2 + Bx + C)$ түрінде болады. Туындыларын есептелік:

$$(\,y^*)' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx$$
$$(\,y^*)'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$$
$$(\,y^*)''' = 24Ax + 6B$$
$$(\,y^*)^{IV} = 24A.$$

Табылған $(\,y^*)''$, $(\,y^*)^{IV}$ -терді берілген теңдеуге қойсақ:

$$(\,y^*)^{IV} - 3(\,y^*)'' = -36Ax^2 - 18Bx - 6C + 24 \equiv 9x^2$$

x айнымалысының бірдей дәрежесінің оң жағы мен сол жағын теңестіре отырып, A,B,C белгісіздерін анықтауға болатын алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} -36A = 9 \\ -18B = 0 \\ -6C + 24A = 0 \end{cases}$$

бұдан A=-1/4 , B=0, C=-1. Сонымен,

Тұрақты коэффициентті жоғары ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер. Тұрақты коэффициентті жоғарғы ретті біртекті сызықты дифференциалдық теңдеулер. Жоғарғы ретті біртекті емес дифференциалдық теңдеулер.Әдістемелік нұсқаулар.

Әзірлеген жоғары математика кафедрасының аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т

$$y^* = x^2\left(-\frac{1}{4}x^2 - 1\right).$$

Ендеше, берілген теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = \widetilde{y} + y^* = C_1 + C_2 x + C_3 e^{x\sqrt{3}} + C_4 e^{-x\sqrt{3}} + x^2\left(-\frac{1}{4}x^2 - 1\right)$$

6 – мысал. Коши есебін шешіңіз:

$$y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 3.$$

Шешуі. $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$ сипаттамалық теңдеудің түбірлері $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$ болғандықтан, берілген теңдеуге сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімі:

$$\widetilde{y} = C_1 e^x + C_2 e^{6x}.$$

Теңдеудің оң жағына мән берсек, α=1; $P_1(x) = x - 2$; α мінездемелік теңдеудің түбірі болғандықтан $r = 1$ және берілген теңдеудің дербес шешімін $y^* = xe^x(Ax + B)$ түрінде іздейміз.

$$y^{*''} - 7y^{*'} + 6y^* = e^x((6A - 7A + A)x^2 + (6B - 7B - 14A + 2A + B + 2A)x - 7B + 2A + 2B) \equiv e^x(x-2)$$

Теңдіктің екі жағын да e^x-ке қысқартып, x айнымалысының бірдей дәрежесінің оң жағы мен сол жағын теңестірсек:

$$\begin{cases} -10A = 1 \\ 2A - 5B = -2 \end{cases},$$

бұдан $A = -1/10$, $B = 9/25$ және дербес шешім:

$$y^* = e^x\left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right).$$

Берілген теңдеудің жалпы шешімі:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + e^x\left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right).$$

Енді Коши есебін шешу үшін, y'-ті табамыз:

$$y' = C_1 e^x + 6C_2 e^{6x} + e^x\left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right) + e^x\left(-\frac{1}{5}x + \frac{9}{25}\right).$$

Бастапқы шарттарды ескере отырып, мынадай жүйе аламыз:

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1, \qquad y'(0) = C_1 + 6C_2 + 9/25 = 3,$$

бұдан: C_1=84/125 , C_2=41/125.

Сонымен, берілген бастапқы шартты қанағаттандыратын теңдеудің дербес шешімі:

$$y = \frac{84}{125}e^x + \frac{41}{125}e^{6x} + e^x\left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right).$$

7 – мысал. Берілген теңдеудің жалпы шешімін табыңыз:

$$y'' + y = x\sin x + \cos 2x$$

Шешуі. $\lambda^2 + 1 = 0$ сипаттамалық теңдеуінің түбірлері $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, онда $y'' + y = 0$ біртекті теңдеуінің жалпы шешімі

$$\widetilde{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

болады.

Берілген (11) дифференциал теңдеуінің оң жағы екі квазиполиномның қосындысына тең: $f_1(x) = x\sin x$, $f_2(x) = \cos 2x$. Сондықтан, (9) формуласын қолданып, алдымен

$$y'' + y = x\sin x$$

теңдеуінің дербес шешімі y_1^*-ті табамыз , одан кейін

$$y'' + y = \cos 2x$$

теңдеуінің y_2^* дербес шешімін табамыз.

Тұрақты коэффициентті жоғарғы ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер. Тұрақты коэффициентті жоғарғы ретті біртекті сызықты дифференциалдық теңдеулер. Жоғарғы ретті біртекті емес дифференциалдық теңдеулер.Әдістемелік нұсқаулар.

Әзірлеген жоғары математика кафедрасының аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т

Теңдеудің оң жағы $f_1(x)$ үшін: $a=0,\ b=1,\ \lambda=i=\lambda_1$, сондықтан $r=1$ және

$$.y_1^*=x((Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x).$$

$$y_1^{*''}+y_1^*=(Ax^2+Bx+2Cx+2A+D-Ax^2-Bx+2Cx+D)\cos x+$$
$$+9Cx^2+Dx-Cx^2-2Ax-Dx-B-2Ax-B+2C)\sin x\equiv x\sin x.$$

Ұқсас мүшелердің коэффиценттерін теңестіре отырып, A,B,C,D және y_1^* табамыз :

$$\left.\begin{array}{l|l} x\cos x & 4C=0, \\ \cos x & 2A+2D=0, \\ x\sin x & -4A=1, \\ \sin x & -2B+2C=0, \end{array}\right\}$$

бұдан $A=-1/4,\ B=0,\ C=0,\ D=1/4$. Сонымен,

$$y_1^*=x(-\frac{1}{4}x\cos x+\frac{1}{4}\sin x)=\frac{1}{4}x(\sin x-x\cos x).$$

Теңдеудің оң жағы $f_2(x)$ үшін: $a=0,\ b=2,\ \lambda=2i$, сондықтан $r=0$ және

$$y_2^*=M\cos 2x+N\sin 2x.$$

Ары қарай, ұқсас мүшелердің коэффиценттерін теңестірсек:

$$\begin{array}{r|l} 1 & y_2^*=M\cos 2x+N\sin 2x, \\ 0 & y_2^{*'}=-2M\sin 2x+2N\cos 2x, \\ 1 & y_2^{*''}=-4M\cos 2x-4N\sin 2x, \\ \hline \end{array}$$

$$y_2^{*''}+y_2^*=-3M\cos 2x-3N\sin 2x\equiv\cos 2x$$

$-3M=1,\ -3N=0$ болады және

$$y_2^*=-\frac{1}{3}\cos 2x.$$

Сонымен,

$$y^*=y_1^*+y_2^*=\frac{1}{4}x(\sin x-x\cos x)-\frac{1}{3}\cos 2x$$

және берілген теңдеудің жалпы шешімі мына түрде болады:

$$y=\tilde{y}+y^*=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{4}x(\sin x-x\cos x)-\frac{1}{3}\cos 2x.$$

8 – мысал. Коши есебін шешіңіз:

$$y''-2y'+5y=3e^x+e^x tg2x,\quad y(0)=3/4,\ y'(0)=2.$$

Шешуі Сәйкес біртекті теңдеудің $\lambda^2-2\lambda+5=0$ сипаттамалық теңдеуінің түбірлері $\lambda_{1,2}=1\pm 2i$. Онда

$$y''-2y'+5y=0$$

теңдеуінің жалпы шешімі (6) формуласы бойынша:

$$\tilde{y}=e^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

(12) теңдеуінің оң жағы екі функцияның қосындысы ретінде берілген. Оның біріншісі $f_1(x)=3e^x$ үшін: $P_r(x)=3,\ a=1,\ b=0,\ \alpha=1\neq\lambda_{1,2}$.

Сондықтан,

$$y''-2y'+5y=3e^x$$

теңдеуінің дербес шешімі y_1^*-ді былай іздейміз: $y_1^*=Ae^x$, мұндағы A белгісізі берілген теңдеуге y_1^*-ны қою көмегімен табылады.

Екінші функция $f_2(x)=e^x tg2x$ квазиполином емес және

$$y''-2y'+5y=e^x tg2x$$

Тұрақты коэффициентті жоғарғы ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер. Тұрақты коэффициентті жоғарғы ретті біртекті сызықты дифференциалдық теңдеулер. Жоғарғы ретті біртекті емес дифференциалдық теңдеулер.Әдістемелік нұсқаулар.

Әзірлеген жоғары математика кафедрасының аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т

теңдеуінің дербес шешімі y_2^* -ны тұрақты шаманы вариациалау әдісімен (Лагранж әдісі) бойынша табылады. Әйгілі теоремаға сәйкес:

$$y_2^* = e^x (C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x).$$

Біздің жағдайымызда жүйе екі теңдеуден тұрады:

$$(y_1 = e^x \cos 2x,\ \ y_2 = e^x \sin 2x):$$

$$\left.\begin{aligned} &C_1' e^x \cos 2x + C_2' e^x \sin 2x = 0, \\ &C_1' e^x (\cos 2x - 2\sin 2x) + C_2' e^x (\sin 2x + 2\cos 2x) = e^x tg 2x. \end{aligned}\right\}$$

Жүйедегі теңдеулердің екі жағын да e^x-ке қысқартып:

$$\left.\begin{aligned} &C_1' \cos 2x + C_2' \sin 2x = 0, \\ &C_1' (\cos 2x - 2\sin 2x) + C_2' (\sin 2x + 2\cos 2x) = tg 2x. \end{aligned}\right\}$$

Соңғы жүйенің анықтауышы (вронскиан):

$$W = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ \cos 2x - 2\sin 2x & \sin 2x + 2co2x \end{vmatrix} = 2.$$

Крамер формуласын қолданып:

$$C_1' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ tg2x & \sin 2x + 2\cos 2x \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\sin 2x\, tgx,$$

$$C_2' = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ \cos 2x - 2\sin 2x & tg2x \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Енді табылған теңдікті интегралдасақ:

$$C_1 = -\frac{1}{2}\int \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1-\cos^2 2x}{\cos 2x}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos 2x} + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{1}{4}\ln|tg(\pi/4 - x)| + \frac{1}{4}\sin 2x,$$

$$C_2 = \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = -\frac{1}{4}\cos 2x.$$

Сонымен,

$$y_2^* = e^x(\frac{1}{4}\ln|tg(\frac{\pi}{4} - x)|\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x\cos 2x) = \frac{1}{4}e^x \ln|tg(\frac{\pi}{4} - x)|\cos 2x.$$

Ендеше, берілген теңдеудің дербес шешімі:

$$y^* = y_1^* + y_2^* = \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{4}e^x \ln|tg(\frac{\pi}{4} - x)|\cos 2x = \frac{1}{4}e^x(3 + \ln|tg(\frac{\pi}{4} - x)|\cos 2x),$$

Ал оның жалпы шешімі:

$$y = \tilde{y} + y^* = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \frac{1}{4}e^x(3 + \ln|tg(\frac{\pi}{4} - x)|\cos 2x).$$

Енді Коши есебін шешу үшін, y'-ті табамыз:

$$y' = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + e^x(-2C_1\sin 2x + 2C_2\cos s2x) +$$

$$+\frac{1}{4}e^x(3 + \ln|tg(\pi/4 - x)|\cos 2x) +$$

$$+\frac{1}{4}e^x(-\frac{\cos 2x}{tg(\pi/4 - x)\cos^2(\pi/4 - x)} - 2\ln|tg(\pi/4 - x)|\sin 2x).$$

Берілген бастапқы шарттарды қолдансақ:

$$y(0) = 3/4 = C_1 + 3/4, \qquad y'(0) = 2 = 2C_2 + 3/4 - 1/2,$$

бұдан $C_1 = 0,\ C_2 = 7/4$.

Сонымен, ізделінді дербес шешім:

Тұрақты коэффициентті жоғарғы ретті сызықты дифференциалдық теңдеулер. Тұрақты коэффициентті жоғарғы ретті біртекті сызықты дифференциалдық теңдеулер. Жоғарғы ретті біртекті емес дифференциалдық теңдеулер.Әдістемелік нұсқаулар.

Әзірлеген жоғары математика кафедрасының аға оқытушысы Жаксыгунова Ж.Т

$$y = \frac{1}{4} e^{x} (3 + 7\sin 2x + \ln|tg(\pi/4 - x)| \cdot \cos 2x).$$